club sciences du 1 mars 2010

Thème : Les mathématiques et la physique

Jacques Chazarain (j.orfeo@free.fr)

Le problème est parfaitement posé par Einstein qui était physicien mais fréquentait aussi les mathématiciens : « *Comment les mathématiques, qui sont une pure invention de l'esprit humain, peuvent être aussi admirablement adaptées à la description du réel ?* » (voir l'annexe1 pour d'autres citations)

Pour essayer de donner des éléments de réponse à cette question, il faut d'abord rappeler en quoi consiste la démarche du mathématicien puis celle du physicien.

I) Les mathématiques

À ses débuts la mathématique était l'étude des nombres (entiers et fractions) motivée par les échanges commerciaux et l'étude des figures géométriques simples (droite, triangle, cercle,…) motivée par les questions d'arpentage (géométrie = mesure de la terre).
Maintenant les maths sont au cœur de toutes nos activités, par exemple :

- les téléphones portables utilisent des méthodes arithmétiques de cryptage des signaux
- en imagerie médicale une transformation géométrique permet de reconstituer la vue 3D d'un organe à partir de ses coupes en 2D
- les maths financières, qui utilisent la théorie des processus stochastiques pour optimiser les placements boursiers, ont été montrées du doigt lors de la récente crise.
- …

Aussi les maths sont en constante évolution, il y a plus de mathématiciens en activité maintenant que dans toute leur histoire passée. Au fil du temps et des besoins, les champs d'étude et d'applications se sont considérablement élargis. En analogie avec les nombres on a défini des structures abstraites sur lesquelles sont définies des opérations comme une addition et /ou une multiplication satisfaisant à certaines relations. Plus précisément, une structure abstraite est la donnée d'un ensemble muni d'opérations qui vérifient a priori une liste de propriétés qui sont les axiomes de la structure. Exemples de structures abstraites : ensembles, groupes, espaces vectoriels, catégories …
Il ne s'agit pas de faire de l'abstraction pour le plaisir, c'est en fait un moyen puissant pour découvrir les propriétés et les symétries profondes qui sont souvent obscurcies par les détails dans leurs instances particulières. Par exemple l'ensemble des symétries d'un cube et l'ensemble des nombres ont en commun une structure plus générale qui est celle de groupe (non commutatif dans le cas des symétries).
Le mathématicien Alain Connes signale un autre intérêt des structures générales[1] :

pour attaquer un problème concernant des objets particuliers (disons les nombres premiers)

- dans un premier temps on étend le problème à une structure abstraite plus générale
- ensuite on cherche à résoudre le problème dans un cas particulièrement simple de cette structure
- enfin on essaye d'adapter au problème initial la méthode trouvée dans ce cas simple.

On a parfois comparé la démarche axiomatique à la définition des règles d'un jeu dont on étudie ensuite les propriétés, mais ici les règles du jeu résultent d'une longue maturation. Il faut souvent plus de créativité pour dégager la bonne définition d'une structure féconde que pour démontrer ensuite ses propriétés.

Cela dit, l'étude des structures primitives (comme les entiers) reste très active car elles comportent de nombreux problèmes non résolus. Par exemple, ce n'est qu'après 350 ans d'effort qu'on a fini par démontrer le théorème de Fermat qui dit que la somme de deux entiers non nuls à la puissance n ne peut égaler un entier à la puissance n dès que n est supérieur à 2 : ($a^n + b^n = c^n$?). La recherche d'une démonstration de ce type de conjecture est l'un des moteurs pour la création de nouvelles théories. Si l'on détaille toutes les

[1] http://webcast.in2p3.fr/as/

théories (beaucoup sont très éloignées de l'arithmétique) qui ont été utilisées pour arriver à cette démonstration on obtiendrait une immense pile de livres.
Les nombres premiers restent un domaine plein de questions non résolues. Un nombre premier est un entier sans autre diviseur que 1 et lui-même ; exemple : 13 est premier et 12 ne l'est pas. Euclide a démontré qu'il en avait une infinité. On appelle premiers jumeaux des nombres premiers qui diffèrent de 2 comme : 11 et 13, 17 et 19. La question «est-ce qu'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux ? » reste actuellement sans réponse.

Les canons de la rigueur changent avec le temps, néanmoins une fois démontré, un théorème ne sera jamais remis en question[2]. Par exemple, on vient de rappeler qu'Euclide avait prouvé l'infinité de nombres premiers, cela reste vrai pour tout le temps et toutes les cultures. C'est un exemple de vérité universelle.
Le raisonnement est l'outil de base du mathématicien. Au début du 20[e] siècle on s'est posé les questions du fondement des mathématiques suite à des paradoxes concernant la théorie des ensembles (l'ensemble de tous les ensembles, l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas). Comme la théorie des ensembles permet de définir ensuite toutes les autres structures, il était important de lui donner un fondement axiomatique (travaux de Cantor, Zermelo, Russell …) en limitant les définitions admissibles. De même, avec les entiers qui sont à la base de toutes les espèces de nombres (rationnels, algébriques, transcendants, réels calculables, réels, complexes, …) on a l'axiomatique proposée par les mathématiciens Dedekind et Peano (voir annexe2).

On pensait alors que l'on pouvait tout démontrer sur les entiers par une déduction à partir d'axiomes jusqu'au coup de tonnerre du logicien Kurt Gödel en 1931. Qui dit en gros : « dans toute axiomatique cohérente (c-à-d non contradictoire) de l'arithmétique on peut construire un énoncé arithmétique qui ne peut-être ni démontré ni réfuté dans cette théorie ». La démonstration est basée sur le paradoxe du Crétois : on code dans l'arithmétique un énoncé E qui dit que E n'est pas démontrable. Ce résultat d'incomplétude s'étend à des théories plus fortes que l'arithmétique comme la théorie des ensembles. C'est un coup d'arrêt à l'espoir de pouvoir tout démontrer formellement à l'intérieur d'une théorie. Le grand programme des mathématiques hypothéco-déductives de Hilbert est à réviser avec un bémol[3]. Cela détruit aussi le rêve de Leibniz qui pensait pouvoir ramener les mathématiques à une espèce de calcul logique.

Ces questions de fondement ont été l'occasion d'un réveil de la logique qui sommeillait depuis la syllogistique d'Aristote[4]. Maintenant l'une des principales sources de développement de la logique mathématique vient de l'informatique, surtout depuis la découverte de la correspondance entre preuve logique et programme informatique[5] .

II) La physique

L'objectif est de découvrir les lois de la nature, c'est-à-dire les relations qui semblent immuables entre certaines grandeurs physiques. Pour étudier un phénomène on commence par isoler des paramètres mesurables, on en étudie donc déjà une abstraction. Si les mesures montrent une stabilité des résultats alors on cherche à exprimer la relation qui les relie et c'est là qu'intervient le langage mathématique.

Par exemple, l'étude de la dynamique commence réellement avec Galilée qui était professeur à Pise. La légende dit qu'il a profité de l'inclinaison du campanile pour étudier la chute des corps. Il mesure le temps de la chute en fonction de la hauteur de chute et du poids de l'objet. En particulier, il constate expérimentalement que ce temps est indépendant du poids. Il continue avec le mouvement d'une bille sur plan incliné pour donner les bases du mouvement des corps. Il découvre des relations mathématiques : la vitesse est proportionnelle au temps de chute et la distance parcourue est proportionnelle au carré du temps.

---

[2] Cependant il existe différentes écoles de pensée selon que l'on s'autorise ou non l'utilisation de certains raisonnements (raisonnement par l'absurde, axiome du choix, …)
[3] Voir l'exposé synthétique de Jean-Yves Girard dans http://iml.univ-mrs.fr/~girard/bordeaux.pdf.gz
[4] Voir par exemple : http://fr.wikipedia.org/wiki/Syllogisme
[5] On trouvera une présentation lisible de cette correspondance dans www.pps.jussieu.fr/~krivine/articles/fonctpro.pdf

En prolongement des travaux de Galilée, Newton énoncera la loi de la dynamique : « à tout moment l'accélération du mouvement d'un point est égale à la force qui lui est appliquée divisée par une constante appelée sa masse ». Cette loi se traduit par une équation différentielle qui permet de prédire l'évolution ultérieure du mouvement.[6]
Deux siècles après, Einstein approfondit la notion de mesure du temps en prenant en compte la finitude de la vitesse de la lumière. Il donnera une nouvelle formulation de la loi du mouvement des corps en s'appuyant sur les travaux des mathématiciens Lorentz et Poincaré. Il en ressort que la mécanique Newtonienne est une excellente approximation de celle d'Einstein lorsque les vitesses sont petites par rapport à celle de la lumière.

La situation en physique est donc tout à fait différente de celle des mathématiques : les lois trouvées concernent un certain domaine de validité :

a. vitesse proche ou non de celle de la lumière
b. dimension (atomiques, humaines ou sidérales)
c. température proche ou non du zéro absolu
d. l'échelle de temps …
e. …

Lorsque des mesures contredisent les prédictions d'une théorie, ce ne sont pas les mesures qui sont fausses mais la théorie qui n'est pas compatible avec certaines expériences. On cherche donc à la raffiner pour être en cohérence avec l'expérience et ceci jusqu'au prochain échec.

Après ce rappel du folklore on peut aborder maintenant notre sujet.

III) Mathématiques et la physique

D'un côté une science des structures abstraites et de l'autre une science qui tente de décrire le réel à l'aide de modèles mathématiques et ça marche, pourquoi ?

A ce propos, signalons l'opposition philosophique entre découverte et invention **:** Platon pense que les mathématiques existent indépendamment de la pensée humaine et qu'elles sont donc à découvrir alors qu'Aristote voit dans les mathématiques une création de l'homme par un travail d'abstraction inspiré du réel.[7]
En ce sens la démarche des physiciens est platonicienne car ils essayent de découvrir les lois de la nature et celle des mathématiciens serait plus aristotélicienne quand ils cherchent à inventer de nouvelles structures.

Revenons aux structures mathématiques et à la plus primitive d'entre elles : les entiers.
Kronecker déclarait: les entiers sont la création de Dieu et tout le reste est celle des hommes. Il veut dire que les entiers sont le résultat de notre expérience quotidienne de la pérennité des objets simples. Si on place 3 cailloux (calculus = cailloux) dans un sac et si on en ajoute 5 puis si on regarde après on en trouvera *toujours* 8. Mais quand on place 3 bactéries dans une boîte puis 5 on risque, quelque temps après, d'en trouver plus de 8 ! Cela peut paraître une boutade mais supposons que nous soyons à l'échelle atomique alors la notion d'objet stable et délimité est bien moins claire, aussi ce type d'expérience risque de donner des résultats différents à chaque fois. Un humain à cette échelle aura peut-être une notion de comptage probabiliste !

Les entiers sont une abstraction mathématique issue de notre expérience de la nature à *l'échelle de nos sens*.
Une fois acquis les entiers, les autres nombres sont des extensions pour résoudre des problèmes. Les questions de partage ont conduit à introduire les fractions. Ce fut un choc pour les Grecs de constater que les nombres fractionnaires n'étaient pas suffisants pour mesurer l'hypoténuse d'un triangle isocèle de côté 1. En

---

[6] Mais pas très longtemps si des phénomènes d'instabilité génèrent du chaos.
[7] Voir par exemple la présentation de Jacques Bouveresse dans http://un2sg4.unige.ch/athena/bouveresse/bou_plat.html

effet, le théorème de Pythagore nous dit qu'alors le carré de l'hypoténuse vaut 2. Mais les Pythagoriciens prouvèrent[8] qu'il n'y a pas de fraction dont le carré est 2. Il faudra introduire plus tard les nombres irrationnels comme $\sqrt{2}$. Ensuite, le rapport entre le demi périmètre d'un cercle et son rayon est constant et s'appelle π. Ce n'est pas une fraction, ce n'est même pas un nombre algébrique mais un nombre transcendant. Et ainsi de suite, divers problèmes ont conduit à étendre la notion de nombre jusqu'aux nombres dits réels qui en fait n'ont aucune réalité. On définira même les nombres complexes comme $\sqrt{-1}$!
On est donc parti d'une abstraction de notre relation avec le réel pour ensuite généraliser chaque notion de nombres pour pouvoir résoudre des problèmes.

La géométrie a suivi la même évolution.
Une schématisation de certaines formes visuelles les plus simples a conduit à abstraire certaines notions comme : droite, triangle, cercle,…pour résoudre des questions d'arpentage. Euclide a défini des règles du jeu (ou postulats) pour pouvoir raisonner sur ces figures. Ce sont des conventions ; son choix, parmi toutes les axiomatiques possibles, a été guidé par des considérations pratiques ; mais il reste libre et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction.
Par exemple, le plus célèbre (dit 5ème) postulat : « par un point on peut mener une unique parallèle à une droite ». On s'est longtemps posé la question de savoir si ce postulat découlait ou non des autres. La réponse est venue beaucoup plus tard. En 1826 Lobatchevski[9] démontre que ce postulat est indispensable en construisant une géométrie (dite hyperbolique) qui satisfait aux autres postulats et dans laquelle on peut mener par un point une infinité de parallèles à une droite. On peut imaginer que si nous étions des être vivant à la surface d'une sphère alors Euclide aurait étudié une autre géométrie. Le fait que l'on puisse étudier d'autres géométries a provoqué la surprise chez les philosophes qui pensaient que les axiomes de la géométrie devaient uniquement rendre compte de notre intuition de l'espace. Alors que pour les mathématiciens la possibilité d'autres géométries fait partie des règles du jeu. Ensuite la géométrie s'est libérée du carcan d'Euclide et on a défini des espaces à n dimensions (utilisés en relativité restreinte), des espaces riemanniens, c'est-à-dire avec une courbure, qui sont utilisés en relativité générale et même des espaces à une infinité de dimensions (utilisés en mécanique quantique).

Les outils logiques utilisés en mathématique sont souvent très élémentaires, d'où le faible intérêt longtemps manifesté par les mathématiciens pour la logique. Par exemple, pour prouver que, sous des hypothèses H, on peut démontrer un théorème T on passe en général[10] par des résultats intermédiaires appelés lemmes. La partie logique se réduit à dire que si H => L et L => T alors on a H => T ; c'est le fameux syllogisme de base. Bien entendu, toute la créativité du mathématicien est d'avoir l'idée des bons lemmes intermédiaires à prouver. La transitivité de l'implication n'est que la traduction de l'expérience courante de la transitivité de l'inclusion : si on place du beurre dans un beurrier et le beurrier dans le réfrigérateur alors on constate que le beurre est au frais. Je pense donc que ce type de raisonnement est acquis par notre cerveau suite à notre expérience du réel à notre échelle.
Des neurobiologistes, comme Stanislas Dehaene[11], pensent même que c'est inné : l'évolution a câblé dans notre cerveau des circuits qui expliquent nos prédispositions à parler, voir, compter avec les petits nombres, ... Cependant, si nous étions des « nano humains » alors notre interaction avec le monde nous aurait probablement conduits à développer d'autres mathématiques et nous utiliserions une autre logique à cause du principe d'incertitude.

Donc on voit dans ces exemples que les structures mathématiques les plus simples, celles dégagées au temps des Grecs ainsi que les méthodes de raisonnement résultent d'une abstraction de notre expérience du réel à notre échelle. Mais ensuite, c'est la créativité des mathématiciens qui, par généralisations successives, a défini de nouvelles structures ; mais le ver était dans le fruit.

Depuis quelques années des mathématiciens et des physiciens travaillent sur l'hypothèse dite « digital physics » qui consiste à dire que tout processus de la physique peut s'interpréter comme le fonctionnement

[8] Une démonstration dans l'annexe 3
[9] Voir le demi plan de Poincaré en annexe 4
[10] En dehors des aspects calculatoires.
[11] www.college-de-france.fr/default/EN/all/psy_cog/20082009.htm

d'une « machine » (classique ou quantique ?). Cette hypothèse, combinée avec la thèse de Church qui dit (je simplifie) : « Toute fonction calculable par une machine discrète est programmable », montrerait que le classe des fonctions utiles en physique est la classe des fonctions récursives. Ce qui expliquerait que les lois de la physique aient toujours une expression mathématique et même souvent simple[12].

Conclusion

Le physicien cherche des modèles mathématiques pour décrire les lois de la physique. Pour cela il fait son marché dans le magasin des structures étudiées par les mathématiciens et jette à la poubelle son dernier achat quand il découvre qu'une prévision de sa théorie est en désaccord avec une expérience.
Comme les structures *primitives* en mathématique sont des abstractions des objets les plus simples du monde réel, il est assez normal qu'il trouve dans le magasin des structures prêtes à l'emploi, du moins pour un certain temps. De plus, le mathématicien fait aussi du sur mesure : des problèmes issus de la physique sont souvent la motivation pour développer des branches des mathématiques (équations aux dérivées partielles, systèmes dynamiques, théorie ergodique,…)

On a vu que notre intuition des entiers, des figures simples et des raisonnements de base résulte de notre interaction avec le réel par nos sens (spécialement la vue). Cette interaction a été à l'œuvre quand notre cerveau s'est complexifié dans nos premiers mois d'existence, de plus des neurobiologistes ont montré que des câblages de base préexistaient suite à l'évolution du cerveau au cours des âges[13].

Cependant, si nous étions des « nano humains » alors notre expérience du monde extérieur nous aurait conduits à développer d'autres mathématiques et nous utiliserions probablement une autre logique. Aussi, n'est-il pas étonnant que les physiciens aient beaucoup plus de mal à trouver des théories mathématiques pour décrire l'infiniment petit ou l'infiniment grand et a fortiori à unifier l'ensemble.

Donc, en résumé :

si on accepte l'hypothèse que les processus du monde matériel peuvent être simulés par le fonctionnement de machines (dont il faut délimiter les caractéristiques)

et

si on considère que nous essayons de comprendre le monde avec notre cerveau dont l'outillage cognitif est à la fois inné via l'évolution et acquis par notre interaction avec le réel

alors il n'est pas si étonnant que les mathématiques soient si admirablement adaptées à modéliser le réel comme se le demandait Wigner[14].

---

[12] On trouvera dans le travail de Gilles Dowek www.lix.polytechnique.fr/~dowek/Philo/physics.pdf une présentation précise et des références concernant ce point de vue.

[13] Le logicien Jean Louis Krivine développe à l'extrême cet aspect dans www.pps.jussieu.fr/~krivine/articles/arco.pdf

[14] www.ipod.org.uk/reality/reality_wigner.pdf et http://cerimes.cines.fr/3517/load/documents/utls/download/pdf/140100.pdf

Annexe1 : Liste de citations (certaines sont traduites) de mathématiciens et physiciens qui ont réfléchi à leur science.

Albert Einstein (1879-1955)
Comment les mathématiques, qui sont une pure invention de l'esprit humain, peuvent être aussi admirablement adaptées à la description du réel ?

Galilée (1564-1642)
Parmi tous les moyens dont nous disposons pour parvenir à la vérité, se trouve le principe de faire appel au raisonnement seulement après l'expérience. En effet, une erreur peut se glisser dans un raisonnement et même s'y cacher, alors qu'il est absolument impossible que l'expérience sensible soit contraire à la vérité

Le livre de la nature est écrit en langage mathématique

Leopold Kronecker (1823-1891)
Les entiers sont la création de Dieu et tout le reste est celle des hommes.

Niels Bohr (1885-1962)
La physique n'étudie pas la nature mais ce qu'on peut dire sur elle.

René Thom (1923-2002)
Décrire n'est pas comprendre.

Paul Adrien Dirac (1902-1984)
La mathématique est l'outil spécialement idéal pour manipuler les concepts abstraits et il n'y a pas de limite à sa puissance dans ce domaine.

Henri Poincaré (1854-1912)
Les mathématiques sont l'art de donner le même nom pour différentes choses.
(et certains ajoutent : la poésie est l'art de donner des noms différents à la même chose)

La science est construite sur des faits comme l'est une maison avec des pierres. Mais une collection de faits ne fait pas plus une science qu'un tas de pierres une maison.

Ce qu'elle peut atteindre, ce ne sont pas les choses elles-mêmes, comme le pensent les dogmatistes naïfs, ce sont seulement les rapports entre les choses ; en dehors de ces rapports, il n'y a pas de réalité connaissable.

Il faut bien s'arrêter quelque part, et pour que la science soit possible, il faut s'arrêter quand on a trouvé la simplicité.

Alain Connes (1947-)
Pour voir le fonctionnement d'un mathématicien contemporain qui réfléchit à la physique, il suffit de visionner le magistral exposé de Alain Connes devant ses collègues de l'Académie des Sciences en 2006 :
http://webcast.in2p3.fr/as/index.php?video=connes.ram

John Von Neumann (1903-1957)

La science n'essaye pas d'expliquer mais seulement de trouver des modèles pour interpréter. C'est-à-dire des constructions mathématiques qui décrivent les phénomènes dans un domaine raisonnablement large.

Erwin Schrödinger (1887-1961)
Les lois de la physique reposent sur la statistique atomique et sont donc seulement approchées.

Werner Heisenberg (1901-1976)
Dans la formulation stricte du principe de causalité « si on connaît le présent alors on peut calculer le futur » ce n'est pas la conclusion qui est fausse mais l'hypothèse.

Max Planck (1858-1947)
La petite portion du monde accessible à nos sens n'est qu'un infime fragment de la nature.

Ludwig Boltzmann (1844-1906)
Il n'y a pas de théorie ultime ; notre but n'est pas de trouver une théorie absolument correcte mais une représentation qui soit aussi simple et exacte que possible.

Pour finir sur une note d'humour :
Anonyme
La philosophie est un jeu avec des objectifs mais sans règle.
Les mathématiques sont un jeu avec des règles mais sans objectif.

===

Annexe2 : Les entiers naturels N = {0, 1, 2, …}

La définition axiomatique des entiers est un excellent exemple pour voir sur un cas élémentaire comment se développe une théorie à partir d'axiomes.

A la suite des travaux de Richard Dedekind(1831-1916), le mathématicien italien Giuseppe Peano(1858-1932) propose en 1889 une axiomatisation de l'arithmétique.

La définition axiomatique des entiers naturels. C'est la donnée :
- *d'un ensemble **N**,*
- *d'une application appelée **successeur** de **N** dans **N** et notée **S***
- *et d'un élément de **N** noté* **0**

tels que :
P1) Si deux entiers ont le même successeur alors ils sont égaux
P2) Le successeur d'un entier n'est jamais **0**
*P3) Pour toute partie de **N** qui contient **0** et contient le **successeur** de chacun de ses membres alors cette partie est l'ensemble de tous les entiers.*

Remarque. L'axiome P3 s'appelle le raisonnement par récurrence, c'est lui qui permet de passer du fini à l'infini. Pour ne pas entrer dans la technique, on a donné une forme qui n'est pas du 1er ordre car on quantifie sur tous les sous ensembles de **N**.

Définitions.
On désigne par **1** le successeur de **0** : **1 = S(0)**
On désigne par **2** le successeur de **1** : **2 = S(1)** = **S(S(0))**
On désigne par **3** le successeur de **2** : **3 = S(2)** = **S(S(1)) = S(S(S(0)))**
…

Ceci correspond à l'idée intuitive de l'écriture des entiers avec des bâtons.

*On démontre qu'il existe une unique opération appelée **addition et notée +** telle que pour tout entier **n** et **p** elle vérifie les deux conditions :*

a) $\mathbf{n + 0 = n}$

b) $\mathbf{n + S(p) = S(n + p)}$

Proposition1. **1 + 2 = 3.**

Preuve. Calculons le membre de gauche :

1 + 2	**= 1 + S (1)**	*par définition de **2***
	= S(1 + 1)	*par b)*
	= S(1 + S (0))	*par définition de **1***
	= S(S(1 + 0))	*par b)*
	= S(S(1))	*par a)*
	= 3	*par définition de **3***

Proposition1bis. 2 + 1 = 3

Preuve. Calculons le membre de gauche :

2 + 1	**= 2 + S(0)**	*par définition de **1***
	= S(2 + 0)	*par b)*
	= S(2)	*par a)*
	= 3	*par définition de **3***

Proposition3. Pour tout entier **p** on a : **0 + p = p + 0**

Preuve

Soit **A** l'ensemble des entiers **p** pour lesquels on a **0 + p = p + 0.**

Pour prouvez que la partie **A** est l'ensemble de tous les entiers on utilise le raisonnement par récurrence P3 :

- **0** est bien dans **A** car **0 + 0 = 0 + 0**

- Si **p** est dans **A** alors prouvons que le **successeur** de **p** est aussi dans **A** :

0 + S (p)	**= S(0 + p)**	*par b)*
	= S (p + 0)	*car **p** est dans **A***
	= S(p)	*par a)*
	= S(p) + 0	*par a), donc* **S(p)** *est dans* **A.**

Plus généralement, on démontre par récurrence que l'addition est commutative :

Théorème. Pour tout entier **n** et **p** on a **p + n = n + p** .

On définit ensuite la multiplication :

*On démontre qu'il existe une unique opération appelée **multiplication** et notée **x** telle que pour tout entier **n** et **p** elle vérifie les deux conditions :*

a) ***n x 1 = n***

b) ***n x S (p) = n x p + n***

Puis on prouve les propriétés de la multiplication des entiers (commutativité, associativité, …). Après on peut introduire la notion de division entière et l'on arrive alors aux problèmes de divisibilité qui sont au cœur l'arithmétique ….

On peut ensuite définir les nombres relatifs (positifs et négatifs), les nombres rationnels, les nombres algébriques, les nombres réels, les nombres complexes …

==

Annexe3

Démonstration du théorème : il n'y a pas de fraction d'entiers p/q dont le carré est 2

Soit $\frac{p}{q}$ la mesure de l'hypoténuse, on peut tjs supposer que p et q ne sont pas tous les deux pairs sinon on simplifie par 2 la fraction.

LEMME : Si le carré d'un entier est pair alors cet entier est pair

Preuve du lemme :
Si n est impair ($n = 2k + 1$) alors son carré est impair : $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$
$= 2(k^2 + 2k) + 1$
Si n est pair ($n = 2k$) et son carré = $4k^2 = 2(2k^2)$ est pair

Preuve du théorème.

On raisonne par l'absurde.

Supposons que le carré de l'hypoténuse vaut 2 on a $(\frac{p}{q})^2 = 2$ et alors $p^2 = 2 q^2$

Donc p^2 est divisible par 2 donc p est pair (posons $p = 2k$) d'où $4k^2 = q^2$
donc q^2 est pair donc q est pair. Or on a supposé que p et q ne sont pas tous les deux pa
d'où une contradiction.

==

Annexe4 Demi plan de Poincaré.

DEMI PLAN DE POINCARE

Droites : les demi cercles centrés sur l'axe
Droites parallèles : les demi cercles qui ne se coupent pas
Les deux cercles verts sont donc parallèles au rouge et passent cependant par un même point.